ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Е. Д. Доманова

Интегрирование по многообразиям. Интегральные формулы теории поля.

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
2009

Доманова Е. Д. Интегрирование по многообразиям. Интегральные формулы теории поля: Учебно-методическое пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 90 стр.

В пособии излагается методика вычисления интегралов по многообразиям на примере кривых и поверхностей в трехмерном пространстве. Благодаря наглядности изложения и выделению принципиальных моментов решения, пособие может быть использовано студентами как при подготовке к практическим занятиям, так и для лучшего освоения теоретического материала.

Пособие разработано в рамках выполнения программы развития передовых образовательных программ и технологий высшего профессионального образования в рамках реализации программы развития НГУ - победителя конкурса программ развития университетов, в отношении которых устанавливается категория "национальный исследовательский университет"

Предисловие

В последние годы было издано несколько фундаментальных учебников по курсу математического анализа. Однако по-прежнему ощущается потребность в пособиях практического плана, дающих пошаговую методику решения задач и помогающих студентам осваивать учебную дисциплину в соответствии с их индивидуальными особенностями.

Наличие универсальных (по охвату тематики) классических сборников задач не решает эту проблему. Во-первых, они рассчитаны в основном на студентов физико-математических специальностей, а во-вторых, являясь именно сборниками задач, не содержат вовсе или содержат лишь небольшое количество отдельных примеров решения задач. Краткость изложения этих примеров не позволяет студентам «нематематических» специальностей в достаточной мере уяснить алгоритм решения типовых задач и сопоставить различные методы решения. В связи с этим, автор поставил перед собой следующие задачи:

1. создать пособие, в котором отражен реальный опыт обучения студентов факультета информационных технологий НГУ, а именно, подробно воспроизвести логику предъявления и ход обсуждения задач, предлагаемых на семинарах и для домашней работы, с тем чтобы помочь студентам глубже проработать изучаемый материал;

2. предложить разнообразную подборку задач, достаточную как для выработки стандартных алгоритмов решения, так и для демонстрации эффективности применения различных методов и учета специфики задачи;

3. изложить материал на примере трехмерного пространства, опираясь на наглядные представления, сформированные в курсе алгебры и аналитической геометрии. При этом очевидные факты должны получать аналитическое обоснование, с тем чтобы рассматриваемые примеры могли служить иллюстрацией к общей теории интегрирования по многообразиям.

Поскольку эта теория излагается практически во всех современных учебниках по математическому анализу, автор посчитал нецелесообразным воспроизводить построение понятия интеграла первого и второго рода, а ограничился лишь напоминанием в начале каждого параграфа основных определений и формул. Начало и конец решений задач отмечаются знаками ◄ и ► соответственно.

Автор выражает искреннюю признательность студентам группы MFH, оказавшим неоценимую техническую помощь при подготовке рукописи.

§1. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть L — кусочно-гладкая кривая, имеющая параметризацию $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$. Если числовая функция $f(x, y, z)$ определена во всех точках кривой L и кусочно-непрерывна, то криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по кривой L существует и может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_L f(x, y, z)\, d\ell =$$

$$= \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Замечание. Значение криволинейного интеграла первого рода не зависит от выбора параметризации кривой L.

Величина $d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$ называется *дифференциалом длины дуги.*

Если кривая задана параметрически, то для вычисления криволинейного интеграла нужно лишь воспользоваться приведенной выше теоремой о сведении его к интегралу по отрезку. Поэтому основное внимание мы уделим вопросу параметрического представления кривой, а именно, получению уравнений движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и определению интервала изменения параметра t.

В частности, если плоская кривая ($n = 2$) задана в прямоугольных координатах $(x; y)$ явным образом: $y = g(x)$, то, считая x параметром, получим

$$d\ell = \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx.$$

Если плоская кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то нетрудно получить ее параметризацию, используя угол φ в качестве параметра.

Полярные координаты точки на кривой L связаны между собой соотношением $r = r(\varphi)$, то есть переменная r является функцией от аргумента φ. Поэтому декартовы координаты этой точки также зависят только от φ, что видно из следующей системы:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi = r(\varphi) \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi = r(\varphi) \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

(Мы подставили $r = r(\varphi)$ в формулы перехода от полярной системы координат к декартовой.)

Полученная система представляет собой параметрическое описание кривой L. Если нет дополнительных ограничений, то множество изменения параметра φ определяется из соотношения $r(\varphi) \geqslant 0$ (по определению полярных координат, $r \geqslant 0$). Если из этого соотношении также не следуют ограничения на φ, то диапазон его изменения — произвольный интервал длины 2π.

Теперь вычислим дифференциал длины дуги. Для этого продифференцируем функции x и y по параметру φ:

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi, \\ y' = r'(\varphi) \cdot \sin\varphi + r(\varphi) \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$

Возведем каждую производную в квадрат и сложим:

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= (r')^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi - 2r\,r' \cdot \cos\varphi \sin\varphi + \\ &+ (r')^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi + 2r\,r' \cdot \cos\varphi \sin\varphi = \\ &= (r')^2 + r^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем довольно простую формулу, которой можно пользоваться всякий раз, когда параметризация кривой получается описанным выше способом из ее полярного уравнения:

$$d\ell = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

<u>ПРИМЕР 1.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, d\ell,$$

где L — окружность $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

◀ Подставив соотношения $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ в уравнение окружности L, получим её полярное уравнение:

$r^2 = a\,r \cdot \cos\varphi$. Формально оно распадается на два: $r = 0$ или $r = a\,\cos\varphi$, однако уравнение $r = 0$ задает единственную точку плоскости, и интеграл по этой вырожденной кривой равен нулю. Поэтому будем считать, что окружность L задана полярным уравнением $r = a\,\cos\varphi$.

В силу неотрицательности r из этого уравнения следует, что $\cos\varphi \geqslant 0$. Чтобы не разрывать область изменения параметра φ, среди всех возможных решений этого неравенства выберем отрезок $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Таким образом, мы получили полярное уравнение кривой L и пределы интегрирования.

Вычислим дифференциал дуги:

$$d\ell = \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi = a\,\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\;d\varphi = a\;d\varphi.$$

Выразим подынтегральную функцию через параметр φ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r = a\,\cos\varphi\,,$$

и приступим к вычислению:

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,d\ell = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos\varphi\,d\varphi = 2a^2\,. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 2.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L |\,y|\,d\ell,$$

где L — лемниската $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

◀ Заметим, что кривая L симметрична относительно осей координат, поскольку ее уравнение инвариантно относительно преобразований $(x;y) \to (-x;y)$ и $(x;y) \to (x;-y)$. Кроме того, подынтегральная функция чётна относительно этих же преобразований, то есть принимает в симметричных точках одинаковые значения. Таким образом, координатные оси разбивают кривую L на четыре части, и интегралы по каждой из этих частей равны между собой. Поэтому, воспользовавшись аддитивностью, можно вычислить интеграл только по той части кривой L, которая лежит в первой четверти: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а затем умножить его на 4.

Правая и левая части уравнения лемнискаты являются однородными многочленами, поэтому ее полярное уравнение можно будет разрешить относительно r. Действительно, выражая координаты x и y через r и φ, получаем

$$r^4 = a^2r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = a^2r^2\,\cos 2\varphi,$$

или $r^2 = a^2\,\cos 2\varphi$ (точку $r=0$, как и в предыдущем примере, не рассматриваем).

Для того, чтобы уравнение $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ имело решение, необходимо, чтобы $\cos 2\varphi \geqslant 0$. В первой координатной четверти ($0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$) решением этого неравенства является отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. При этих значениях φ определена функция $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, задающая полярное уравнение лемнискаты (как всегда, по умолчанию $a > 0$).

Чтобы нарисовать эскиз этой кривой, заметим, что при изменении угла φ от 0 до $\pi/4$ функция $\cos 2\varphi$ монотонно убывает от 1 до 0, то есть с ростом угла φ на лучах $\varphi = const$ нужно откладывать все меньшие отрезки.

Вычислим дифференциал дуги:

$$d\ell = \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = a\sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + \cos 2\varphi}\; d\varphi = \frac{a\ d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ .$$

В первой координатной четверти $|\,y\,| = y = r(\varphi)\sin\varphi$, поэтому:

$$\int\limits_L |\,y\,|\, d\ell = 4\int\limits_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \sin\varphi\ \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ d\varphi =$$

$$= 4a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi = 2a^2\,(2 - \sqrt{2}). \ \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 3.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4})\, d\ell,$$

где L — дуга астроиды $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

◀ Заметим, что астроида является линией уровня однородной алгебраической функции $F(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$, а это значит, что ее уравнение может приобрести очень простой вид после перехода к обобщенной полярной системе координат

$$x = r \cdot \cos^p \varphi, \quad y = r \cdot \sin^p \varphi,$$

если надлежащим образом подобрать значение параметра p.

Подставим выражения для x и y в уравнение астроиды:

$$r^{2/3} \left(\cos^{2p/3} \varphi + \sin^{2p/3} \varphi\right) = a^{2/3}.$$

При $p = 3$ выражение в скобках становится равным 1 по основному тригонометрическому тождеству, и уравнение астроиды принимает вид $r^{2/3} = a^{2/3}$, или $r = a$. Таким образом, значение r остается постоянным при изменении параметра φ, и возвращая полученное значение $r = a$ в выражения для x и y, получаем параметризацию астроиды:

$$x = a \cdot \cos^3 \varphi, \quad y = a \cdot \sin^3 \varphi.$$

Как видим, астроида играет роль «окружности» в указанной системе координат $x = r \cdot \cos^3 \varphi, \quad y = r \cdot \sin^3 \varphi$, а астроиды, соответствующие различным значениям a, вместе с лучами $\varphi = const$ образуют координатную сетку, аналогичную полярной.

Нетрудно заметить, что астроида симметрична относительно координатных осей, а подынтегральная функция чётна по обеим переменным. Поэтому достаточно вычислить интеграл только по части кривой L, лежащей в первой координатой четверти, а затем умножить результат на 4. Поскольку $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то одновременно $\cos\varphi \geqslant 0$ и $\sin\varphi \geqslant 0$, что дает нам пределы интегрирования $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Вычислим дифференциал длины дуги (мы уже не можем воспользоваться формулой, полученной для обычной полярной параметризации):

$$\begin{cases} x' = -3\,a\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi, \\ y' = \ 3\,a\ \sin^2\varphi\cdot\cos\varphi. \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 9\,a^2(\cos^4\varphi\,\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\,\cos^2\varphi) = \\ = 9\,a^2\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi,$$

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,d\varphi = 3\,a\sqrt{\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi}\,d\varphi = \\ = 3\,a\cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi,$$

поскольку $\cos\varphi \geqslant 0$ и $\sin\varphi \geqslant 0$.

И наконец

$$\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3})\, d\ell = 12\, a^{7/3} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\, \cos\varphi \sin\varphi\; d\varphi =$$

$$= 12\, a^{7/3} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^5\varphi\, \sin\varphi + \sin^5\varphi\, \cos\varphi)\; d\varphi =$$

$$= 12\, a^{7/3} \cdot 2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\, \cos\varphi\; d\varphi = 4\, a^{7/3}. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 4.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L |z|\, d\ell,$$

где L — пересечение кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$.

◀ Проекцией кривой L на плоскость xOy является окружность $x^2 + y^2 = 1$, имеющая, как нетрудно понять, параметризацию $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$.

Тогда $z = x^2 - y^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$.

Поскольку выражения, задающие параметризацию, имеют смысл при любых значениях φ, множеством изменения параметра φ можно считать интервал $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Однако, учитывая симметрию кривой L относительно преобразований $(x; y; z) \to (-x; y; z)$ и $(x; y; z) \to (x; -y; z)$ и четность подынтегральной функции по переменным x и y (так как кривая L лежит на параболоиде, то $|z| = |x^2 - y^2|$), можно вычислить интеграл по части кривой L, лежащей в первой четверти: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, а затем умножить его на 4.

Продифференцируем функции $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, $z(\varphi)$ и найдем дифференциал длины дуги:

$$x' = -\sin\varphi, \quad y' = \cos\varphi, \quad z' = -2\,\sin 2\varphi,$$

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, d\varphi = \sqrt{1 + 4\sin^2 2\varphi}\, d\varphi.$$

Итак,

$$\int\limits_L |z|\, d\ell = 4\int\limits_0^{\pi/2} |\cos 2\varphi| \sqrt{1 + 4\sin^2 2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} |\cos t| \sqrt{1 + 4\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\sin^2 t}\cos t\, dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{1} \sqrt{1 + 4p^2}\, dp = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4} \quad \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 5.</u> Написать параметризацию кривой, являющейся пересечением двух поверхностей:

$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geqslant 0$.

Замечание. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geqslant 0$ задает верхнюю половину конуса, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ — сферу, центр которой смещен по оси Ox на величину, равную радиусу (каноническое уравнение сферы: $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$).

◀ Исключив из системы уравнений, задающих кривую, переменную z, мы тем самым получим уравнение проекции данной кривой на плоскость xOy: $x^2 + y^2 = ax$. Это окружность, полярное уравнение которой мы уже получили в первом примере: $r = a\cos\varphi$, где $|\varphi| \leqslant \pi/2$.

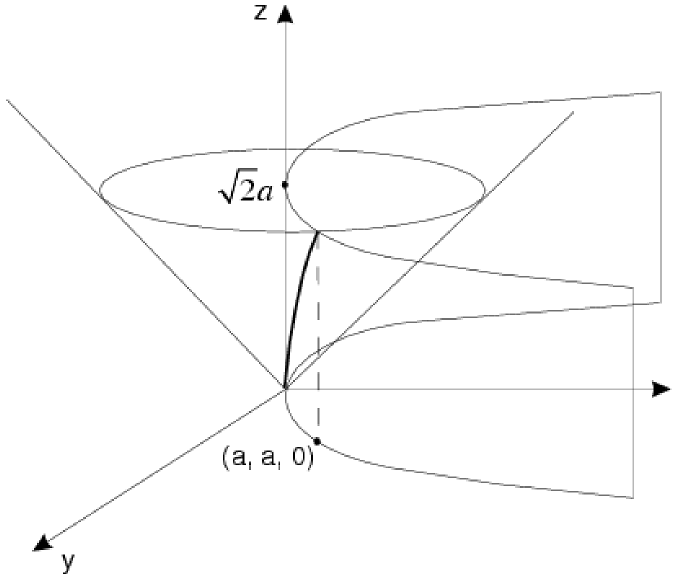
Из уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ и условия $z \geqslant 0$ следует, что $z = r = a\cos\varphi$. Возвращаясь к декартовым координатам, получаем параметризацию:

$x = a\cos^2\varphi$, $y = a\cos\varphi\,\sin\varphi$, $z = a\cos\varphi$ ▶

ПРИМЕР 6. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L z\,d\ell,$$

где L — друга пространственной кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ от точки $(0;\,0;\,0)$ до точки $(a;\,a;\,a\sqrt{2})$.



<u>Способ 1.</u>

◀ Кривая L является пересечением конуса и параболического цилиндра. Она состоит из четырех ветвей, пересекающихся в точке $(0; 0; 0)$ и симметричных относительно плоскостей $z = 0$ и $y = 0$. Из уравнения $y^2 = ax$ следует, что $x \geqslant 0$, а знаки y и z могут быть любыми. Из уравнений видно, что с ростом x от 0 до $+\infty$ значения $|y|$ и $|z|$ также монотонно возрастают. Поскольку задана дуга кривой от точки $(0; 0; 0)$ до точки $(a; a; a\sqrt{2})$, где a по умолчанию положительно, то $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$.

Для того чтобы параметризовать кривую L, можно выбрать в качестве параметра одну из переменных, например

x, а остальные выразить через нее. Таким образом,

$$x = t, \qquad y = \sqrt{at}, \qquad z = \sqrt{t^2 + at}.$$

$$x' = 1, \qquad y' = \frac{a}{2\sqrt{at}}, \qquad z' = \frac{2t + a}{2\sqrt{t^2 + at}}.$$

Параметр t, очевидно, изменяется в пределах от 0 до a, поскольку из $y = a$ следует, что $t = a$.

Далее,

$$d\ell = \sqrt{\frac{8t^2 + 9at + 2a^2}{4t \cdot (t + a)}}\, dt.$$

$$\int\limits_L z\, d\ell = \int\limits_0^a \sqrt{t^2 + at} \cdot \sqrt{\frac{8t^2 + 9at + 2a^2}{4t\,(t + a)}}\; dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{8p^2 + 9p + 2}\, dp =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{512}\left(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right). \blacktriangleright$$

<u>Способ 2.</u>

◀ Уравнения, задающие L, имеют достаточно простой вид в цилиндрических координатах:

$$r^2 = h^2, \quad r^2 \cdot \sin^2\varphi = ar \cdot \cos\varphi.$$

Эту систему можно разрешить относительно параметра φ с учетом того, что рассматриваемая дуга расположена в области $h \geqslant 0$. Тогда

$$h = r, \quad r = \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получаем параметризацию кривой

$$x = a\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = a\ \operatorname{ctg}^2\varphi, \quad y = a\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = a\ \operatorname{ctg}\varphi, \quad z = a\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Найдем пределы интегрирования.

Поскольку $y \geqslant 0$, то $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \geqslant 0$, или, другими словами, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ имеют одинаковые знаки. А так как $z \geqslant 0$, то $\cos\varphi \geqslant 0$, и значит $\sin\varphi > 0$. Таким образом, $0 < \varphi \leqslant \pi/2$.

Далее, так как $y \leqslant a$, то $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \leqslant 1$, что, с учетом положительности $\sin\varphi$, равносильно условию $\cos\varphi \leqslant \sin\varphi$, или $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Итак, пределы интегрирования найдены.

Вычислим дифференциал длины дуги.

$$x' = a \cdot 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot \frac{-1}{\sin^2\varphi} = -2a \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi},$$
$$y' = -\frac{a}{\sin^2\varphi},$$
$$z' = a \cdot \frac{-\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} = -a \cdot \frac{1+\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
(d\ell)^2 &= ((x')^2+(y')^2+(z')^2)\,(d\varphi)^2 = \\
&= a^2\left(\frac{4\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi}+\frac{1}{\sin^4\varphi}+\frac{1+2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\sin^6\varphi}\right)(d\varphi)^2 = \\
&= a^2\,\frac{\cos^4\varphi+5\cos^2\varphi+2}{\sin^6\varphi}\,(d\varphi)^2.
\end{aligned}
$$

Теперь можно приступать к вычислению интеграла:

$$
\int\limits_L z\,d\ell = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} a^2\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\frac{\sqrt{5\cos^2\varphi+2+\cos^4\varphi}}{\sin^3\varphi}\,d\varphi.
$$

Сделаем замену $t=\sin^{-2}\varphi$. Тогда $dt=-2\,\dfrac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\,d\varphi$, причем t изменяется от 2 до 1 с ростом φ.

Преобразуем подкоренное выражение:

$$
\cos^4\varphi+5\cos^2\varphi+2=\sin^4\varphi-7\cdot\sin^2\varphi+8,
$$

и продолжим вычисления.

$$
\int\limits_L z\,d\ell = \frac{a^2}{-2}\int\limits_2^1 \sqrt{1-7\cdot t+8\cdot t^2}\,dt =
$$

$$
= \frac{a^2}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{8\cdot t^2-7\cdot t+1}\,dt =
$$

$$
= \frac{a^2\sqrt{2}}{512}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).\ \blacktriangleright
$$

ПРИМЕР 7. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L x^2\,d\ell,$$

где L — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

Способ 1.

◀ В цилиндрических координатах окружность L задается системой уравнений $r^2+h^2=a^2, \quad h=-r(\cos\varphi+\sin\varphi)$.

Подставляя h из второго уравнения в первое, выразим r через φ:

$$r^2+r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)^2=a^2$$

$$r^2=\frac{a^2}{2+2\sin\varphi\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}.$$

Итак, параметрическое уравнение окружности L:

$$\begin{cases} x=r(\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y=r(\varphi)\cdot\sin\varphi, \\ z=-r(\varphi)\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi), \end{cases} \qquad \text{где } r(\varphi)=\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}\,.$$

Первые два уравнения системы по сути являются параметрическими уравнениями проекции окружности L на плоскость xOy, а зависимость $r(\varphi)=a(\sqrt{2+\sin 2\varphi})^{-1}$ — полярным уравнением этой проекции. В таком случае, как было доказано ранее, $(x')^2+(y')^2=(r')^2+r^2$.

Кроме того, поскольку $z = -(x+y)$, то

$$(z')^2 = (x'+y')^2 = (x')^2 + (y')^2 + 2x' \cdot y' = \\ = (r')^2 + r^2 + ((r')^2 - r^2)\,\sin 2\varphi + 2\,r'r\,\cos 2\varphi,$$

где $r' = -a \cdot \cos 2\varphi\,(2+\sin 2\varphi)^{-3/2}$.

Далее,

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (x'+y')^2 = \\ = r^2(2-\sin 2\varphi) + (r')^2(2+\sin 2\varphi) + 2\,(r'r)\,\cos 2\varphi = \\ = 3a^2\,(2+\sin 2\varphi)^{-2}\,.$$

Итак, дифференциал длины дуги равен

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,d\varphi = \frac{\sqrt{3}a}{2+\sin 2\varphi}\,d\varphi\,.$$

Найдем пределы интегрирования. Параметр φ имеет простой геометрический смысл — это угол между проекцией радиус – вектора точки $(x;\,y;\,z)$ на плоскость xOy и положительным направлением оси Ox. Поскольку проекцией окружности L является эллипс, а начало координат содержится внутри него, то при обходе этого эллипса точка (x,y) совершит полный оборот вокруг начала координат, и значит параметр φ изменяется в пределах от 0 до 2π.

Приступим к вычислению интеграла:

$$\int\limits_L x^2\,d\ell = \sqrt{3}\,a^3 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}$$

Поскольку $2\cos^2\varphi = \cos 2\varphi + 1$, то подынтегральная функция является функцией аргумента 2φ, а значит, π – периодична. Поэтому интеграл по отрезку $[0;\,2\pi]$ равен удвоенному интегралу по любому отрезку, длина которого равна периоду, например, по отрезку $[-\pi/2;\,\pi/2]$. Замена переменной $t = \operatorname{tg}\varphi$ сводит задачу к интегрированию рациональной функции:

$$\int\limits_L x^2\,d\ell = \sqrt{3}\,a^3 \cdot 2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,a^3}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(1+\sin\varphi\cos\varphi)^2} = \frac{\sqrt{3}\,a^3}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,t}{(t^2+t+1)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,a^3}{6} \left(\frac{2t+1}{(t^2+t+1)} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{3} \cdot \pi a^3 \,. \blacktriangleright$$

<u>Способ 2.</u>

◀ Заметим, что уравнения, определяющие окружность L, инвариантны относительно циклической замены переменных $x \to y \to z \to x$, поэтому

$$\int\limits_L x^2\,d\ell = \int\limits_L y^2\,d\ell = \int\limits_L z^2\,d\ell.$$

Поскольку окружность L лежит на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$, то на этой окружности подынтегральная функция $x^2+y^2+z^2$ принимает постоянное значение a^2. Следовательно,

$$\int\limits_L x^2\,d\ell = \frac{1}{3}\left(\int\limits_L x^2\,d\ell + \int\limits_L y^2\,d\ell + \int\limits_L z^2\,d\ell\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,d\ell = \frac{1}{3}\int\limits_L a^2\,d\ell = \frac{a^2}{3}\int\limits_L 1\,d\ell = \frac{2\pi a^3}{3}\,. \blacktriangleright$$

Определение. Пусть некоторая скалярная величина (масса, заряд и т. п.) распределена на кривой L с линейной плотностью $\rho(x;y;z)$, а $r(M)$ — расстояние от точки $M\in L$ до некоторой плоскости или прямой P. Интегралы

$$I_P^{(k)} = \int\limits_L \rho\, r^k\,d\ell,\quad k\in\mathbb{Z}$$

называются *моментами порядка k кривой L относительно плоскости (прямой) P*. Так, масса кривой

$$M(L) = \int\limits_L \rho\,d\ell$$

является моментом нулевого порядка, моменты первого порядка называются *статическими моментами*, а моменты второго порядка — *моментами инерции*.

Координаты центра масс кривой L вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{I^{(1)}_{yOz}}{M(L)} = \frac{1}{M(L)} \int\limits_L x\rho\, d\ell\,, \quad y_0 = \frac{I^{(1)}_{xOz}}{M(L)} = \frac{1}{M(L)} \int\limits_L y\rho\, d\ell\,,$$

$$z_0 = \frac{I^{(1)}_{xOy}}{M(L)} = \frac{1}{M(L)} \int\limits_L z\rho\, d\ell\,.$$

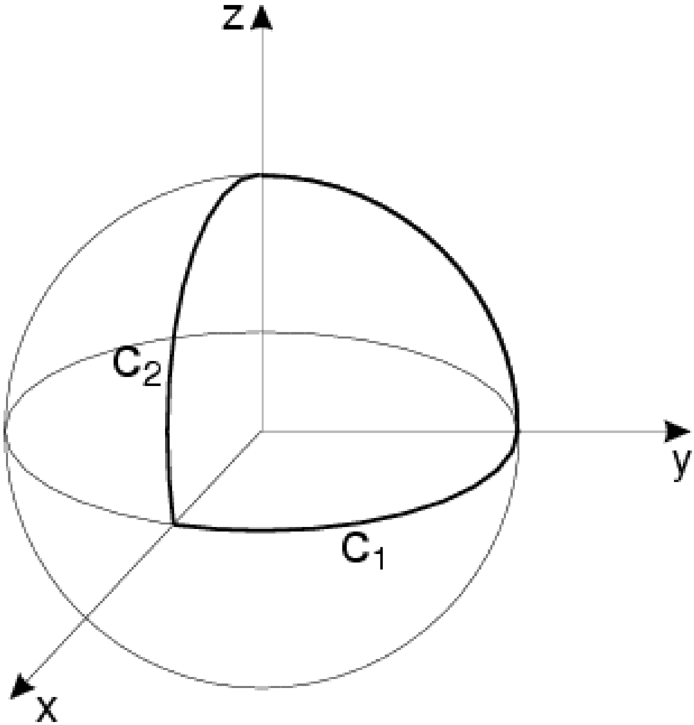
Моменты инерции кривой L относительно осей Ox, Oy и Oz вычисляются по формулам:

$$I^{(2)}_{Ox} = \int\limits_L (y^2 + z^2)\,\rho\, d\ell \qquad I^{(2)}_{Oy} = \int\limits_L (x^2 + z^2)\,\rho\, d\ell\,,$$

$$I^{(2)}_{Oz} = \int\limits_L (x^2 + y^2)\,\rho\, d\ell\,.$$

ПРИМЕР 8. Вычислить координаты центра масс контура C, являющегося границей сферического треугольника:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$



◀ Пространственная кривая C состоит из трех плоских кусков C_i, $i = 1, 2, 3$, каждый из которых представляет собой четверть окружности радиуса a, лежащей в одной из координатных плоскостей, с центром в точке $(0; 0; 0)$. Кроме того, при циклической замене переменных $x \to y \to z \to x$, то есть при повороте вокруг оси $x = y = z$ на 120^o, кривая C переходит сама в себя $(C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_1)$.

Поэтому массу кривой L можно найти как

$$M = \int\limits_C d\ell = 3\int\limits_{C_1} 1 d\ell = 3\int\limits_0^{\pi/2} a\, d\varphi = \frac{3\pi a}{2}\,.$$

(C_1 лежит в плоскости xOy и параметризуется естественным образом: $x = a\cdot\cos\varphi$, $y = a\cdot\sin\varphi$, $z = 0$. Следовательно, $d\ell = a\,d\varphi$.)

Понятно также, что в силу указанной симметрии центр масс лежит на прямой $x = y = z$, то есть его координаты равны: $x_0 = y_0 = z_0$. Заметим, что $\int\limits_{C_1} z\,d\ell = 0$, поскольку $z = 0$ в плоскости xOy. Поэтому

$$M_z = \int\limits_{C_2} z\,d\ell + \int\limits_{C_3} z\,d\ell = 2\int\limits_{C_2} z\,d\ell = 2a^2\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = 2a^2,$$

итак,

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{M_z}{M} = \frac{2a^2}{3\pi a/2} = \frac{4a}{3\pi}\,. \blacktriangleright$$

§2. Поверхностный интеграл первого рода

Рассмотрим отображение ω ограниченной, измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$, заданное непрерывными функциями $x = x\,(u;\, v)$, $y = y\,(u;\, v)$, $z = z\,(u;\, v)$, где $(u;\, v) \in D$. Пусть отображение ω взаимно-однозначно во внутренних точках множества D.

Поверхностью S в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется множество точек $(x,\, y,\, z)$, являющихся значениями этого отображения. Уравнения $x = x\,(u;\, v)$, $y = y\,(u;\, v)$, $z = z\,(u;\, v)$ называются *параметрическими уравнениями* поверхности S.

Каждой точке $(u; v) \in D$ отображение ω ставит в соответствие точку $M(u; v) \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ можно представить как вложение в $\mathbb{R}^3$ изогнутого, деформированного куска плоскости.

Пусть $(u_0; v_0) \in D$. Тогда через точку $M(u_0; v_0)$, принадлежащую поверхности S в некоторой ее окрестности проходят две кривые: $x = x\,(u_0;\, t)$, $y = y\,(u_0;\, t)$, $z = z\,(u_0;\, t)$ и $x = x\,(s;\, v_0)$, $y = y\,(s;\, v_0)$, $z = z\,(s;\, v_0)$, лежащие на поверхности S, которые называются *координатными линиями*, а сами значения $(u_0; v_0)$ называются *криволинейными координатами* точки M на поверхности S.

В каждой точке поверхности S, имеющей гладкую параметризацию, определены два вектора: $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, касательные к координатным линиям (здесь $\vec{r} = (x;\ y;\ z)$ означает радиус-вектор точки $(x,\ y,\ z)$). Они образуют базис в касательной плоскости к S.

Как известно, вектор $\vec{N} = [\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v]$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, а длина его равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Вектор $\vec{N} = [\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v]$ будем называть *нормалью* к поверхности S, *отвечающей параметризации* ω.

Величина $dS = |\vec{N}|\,du\,dv$ называется *дифференциалом площади поверхности.*

Для ее вычисления существует еще одна формула, основанная на том, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, может быть выражена через определитель матрицы Грама:

$$\begin{Vmatrix} (\vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_u) & (\vec{r}\,'_v \cdot \vec{r}\,'_u) \\ (\vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_v) & (\vec{r}\,'_v \cdot \vec{r}\,'_v) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}$$

Тогда, если обозначить определитель $EG - F^2$ через Γ, получим формулу

$$dS = \sqrt{\Gamma}\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

В частности, если поверхность в пространстве R^3 задана явным образом: $z = g(x,\, y)$, то

$$dS = \sqrt{1 + (g\,'_x)^2 + (g\,'_y)^2}\; dx\, dy.$$

Действительно, считая x и y параметрами, запишем параметрическое уравнение данной поверхности:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = g(x, y).$$

Этой параметризации отвечает нормаль

$$\vec{N} = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & g\,'_x \\ 0 & 1 & g\,'_y \end{Vmatrix} = (-g\,'_x; -g\,'_y; 1).$$

Поэтому $dS = |\vec{N}|\, dx\, dy = \sqrt{1 + (g\,'_x)^2 + (g\,'_y)^2}\; dx\, dy$.

Если функция $f(x,\, y,\, z)$ непрерывна на невырожденной гладкой поверхности S, которая является образом измеримого компакта D при отображении $\omega(u; v)$, то поверхностный интеграл первого рода от функции f по поверхности S существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_S f(x,\, y,\, z)\, dS =$$

$$= \iint\limits_D f(x(u; v),\, y(u; v),\, z(u; v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Замечание. Значение поверхностного интеграла первого рода не зависит от выбора параметризации поверхности S.

ПРИМЕР 9. Найти площадь части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

◀ Поверхность задана явным уравнением $z = z(x, y)$, поэтому можно считать параметрами переменные x и y. Область изменения параметров — это проекция поверхности на плоскость xOy, то есть круг $K : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

$$dS = \sqrt{1 + (z\,'_x)^2 + (z\,'_y)^2}\; dx\,dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \text{ поэтому}$$

$$\mu(S) = \int\limits_S 1\,dS = \int\limits_K \sqrt{1 + x^2 + y^2}\; d\,x\;d\,y =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + r^2}\; r\,d\,r d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{1 + r^2}\; r\,d\,r =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + t}\;\frac{dt}{2} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\,. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 10. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (x + y + z)\,dS,$$

где S — поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$.

◀ Поверхность S представляет собой полусферу радиуса a с центром в начале координат, поэтому для получения параметризации воспользуемся сферической системой координат, взяв $\rho = a$:

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = a \cdot \cos\theta. \end{cases}$$

Прообразом сферы при этом отображении является прямоугольник $\Pi = \big\{(\varphi;\theta) \big|\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\big\}$. Поскольку $z \geqslant 0$, то из последнего уравнения следует, что $\cos\theta \geqslant 0$, то есть $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Вычислим дифференциал площади поверхности:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta.$$

$$\vec{r}\,'_{\varphi} = a\,(-\sin\theta\sin\varphi;\, \sin\theta\, \cos\varphi;\, 0),$$

$$\vec{r}\,'_{\theta} = a\,(\cos\theta\cos\varphi;\, \cos\theta\sin\varphi;\, -\sin\theta)$$

(далее штрихи при обозначении производных будем опускать, если это не приводит к недоразумениям).

$E = (\vec{r}_{\varphi} \cdot \vec{r}_{\varphi}) = a^2\sin^2\theta$, то есть $|\,\vec{r}_{\varphi}\,| = a\sin\theta$

Поскольку в сферической системе координат угол θ изменяется в пределах от 0 до π, то $\sin\theta \geqslant 0$.

$G = (\vec{r}_{\theta} \cdot \vec{r}_{\theta}) = a^2$, то есть $|\,\vec{r}_{\theta}\,| = a$.

Длины векторов $\vec{r}_\varphi$ и $\vec{r}_\theta$ показывают, как изменяется длина координатных линий на сфере по сравнению с их прообразами. Так, $|\,\vec{r}_\theta\,| = a$ означает, что меридианы $\varphi = const$ равномерно растягиваются или сжимаются в a раз во всех точках. $|\,\vec{r}_\varphi\,| = a\sin\theta$ означает, что каждая параллель $\theta = const$ изменяется в $a\sin\theta$ раз равномерно по всей длине, но параллели, соответствующие разным значения θ, имеют разную длину, тем меньшую, чем ближе эта параллель к полюсу сферы ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$).

$F = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\theta) = 0$. Это соотношение означает, что касательные векторы, а значит и координатные линии на сфере в точке их пересечения, перпендикулярны друг другу. То есть параллели и меридианы образуют на сфере прямоугольную, хотя и криволинейную, координатную сетку.

Вернемся к вычислению дифференциала площади:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta = \sqrt{a^2 \sin^2\theta \cdot a^2}\, d\varphi\, d\theta = a^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\,.$$

Заметим также, что в силу симметрии полусферы относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ и нечетности функций x и y относительно этих плоскостей

$$\iint\limits_S y\, dS = 0 \quad \text{и} \quad \iint\limits_S x\, dS = 0,$$

поэтому

$$\iint_S (x+y+z)\,dS = \iint_S z\,dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta\cdot a^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

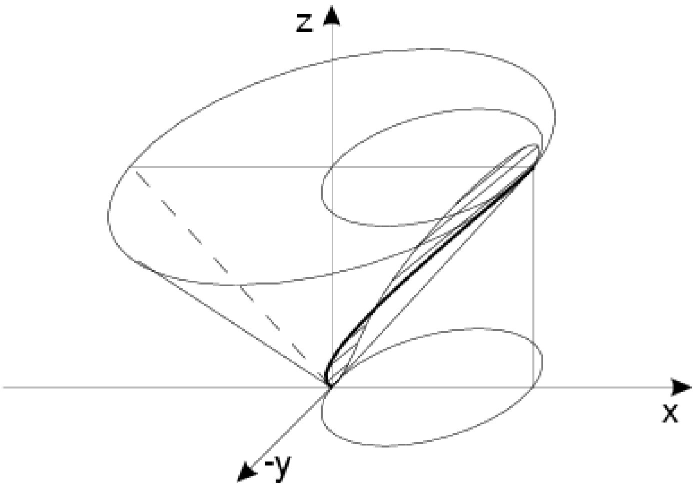
$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d(\sin\theta) = \pi a^3\,. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 11.</u> Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (xy+yz+zx)\,dS,$$

где S — часть поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2+y^2 = 2ax$.

◀ Поверхность S, по которой ведется интегрирование, представляет собой лежащую в полупространстве $z \geqslant 0$ часть кругового конуса $z^2 = x^2+y^2$, ось вращения которого совпадает с осью Oz. Нас интересует часть конуса, расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2ax$, направляющие которого также параллельны оси Oz, а перпендикулярное сечение является окружностью $x^2+y^2 = 2ax$, каноническое уравнение которой $(x-a)^2+y^2 = a^2$. Таким образом, проектируя поверхность S на плоскость xOy, мы получим круг $(x-a)^2+y^2 \leqslant a^2$, или, возвращаясь к исходному виду, $x^2+y^2 \leqslant 2ax$.



В цилиндрической системе координат уравнение конуса $h^2 = r^2$, откуда, с учетом условия $z = h \geqslant 0$, следует, что $h = r$. Таким образом, получаем параметрическое представление поверхности S:

$$x = h \cdot \cos\varphi, \quad y = h \cdot \sin\varphi, \quad z = h,$$

$$0 \leqslant h, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,.$$

Подставляя полученные выражения для x и y в неравенство $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$, перейдем к неравенству $h^2 \leqslant 2ah\cos\varphi$, которое с учетом $h \geqslant 0$ равносильно условию $h \leqslant 2a\cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi \geqslant 0$, поэтому, чтобы не разрывать область изменения параметра φ, будем считать, что $-\pi/2 \leqslant \varphi < \pi/2$.

Итак, мы получили параметрическое представление поверхности и нашли пределы интегрирования. Осталось вычислить элемент площади поверхности dS.

$$\vec{r}_h = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 1),\ \ \vec{r}_\varphi = (-h\sin\varphi;\ h\cos\varphi;\ 0).$$

$E = (\vec{r}_h \cdot \vec{r}_h) = 2$, $G = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi) = h^2$, $F = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_h) = 0$.

$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dh\, d\varphi = \sqrt{2}\ h\, dh\, d\varphi.$

Поскольку поверхность симметрична относително плоскости $y = 0$, а функция $y \cdot (x + z)$ нечётна по переменной y, то

$$\iint\limits_S (xy + yz)\, dS = 0.$$

Итак,

$$\iint\limits_S (xy + yz + zx)\, dS = \iint\limits_S zx\, dS =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{2a\cdot\cos\varphi} \sqrt{2}\, h^3 \cos\varphi\, dh\, d\varphi =$$

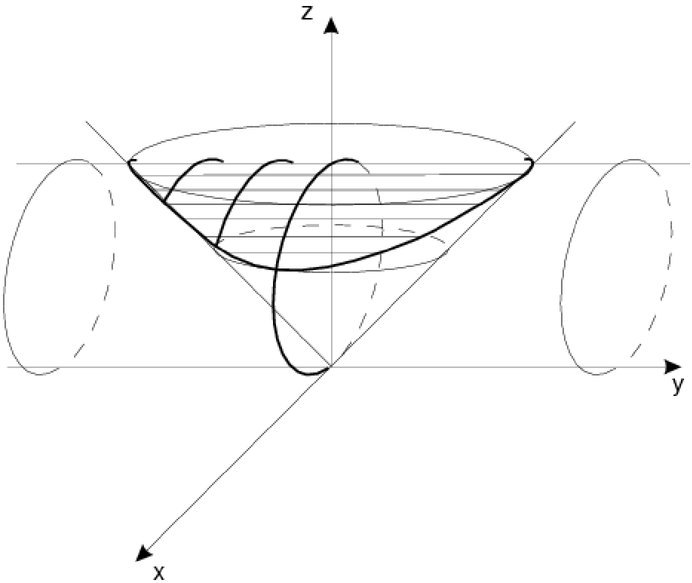
$$= 2\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2a\cdot\cos\varphi} h^3\, dh \right) \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} 4a^4\ \cos^4\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4\,. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 12. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S z\,dS,$$

где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



◀ В отличие от предыдущего примера, поверхность S, по которой ведется интегрирование, является частью цилиндра, образующие которого параллельны оси Oy. Поэтому для параметризации воспользуемся цилиндрическими координатами с выделенной осью Oy. Перпендикулярным сечением этого цилиндра является окружность $x^2 + z^2 = 2az$, смещенная по оси Oz, поэтому полярный угол будем отсчитывать именно от этой оси. В дальнейшем это позволит учесть симметрию цилиндра относительно плоскости $x = 0$ и упростить вычисления. Итак, в координатах

$$x = r \cdot \sin\varphi, \quad y = h, \quad z = r \cdot \cos\varphi$$

цилиндр описывается уравнением $r = 2\,a\,\cos\varphi$.

Соответственно, его параметризация имеет вид:

$$\begin{cases} x = 2\,a\,\sin\varphi\,\cos\varphi = a\,\sin 2\varphi, \\ y = h, \\ z = 2\,a\,\cos^2\varphi = a\,(\cos 2\varphi + 1). \end{cases}$$

Вычислим дифференциал площади поверхности.

$\vec{r}_h = (0,\,1,\,0)$, $\vec{r}_\varphi = (2a\,\cos 2\varphi;\,0;\,-2a\,\sin 2\varphi)$.

$E = (\vec{r}_h \cdot \vec{r}_h) = 1$, $G = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi) = 4a^2$, $F = (\vec{r}_h \cdot \vec{r}_\varphi) = 0$.

Таким образом, $dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\,h\,d\varphi = 2a\,dh\,d\varphi$.

Теперь выясним, каковы пределы изменения параметров h и φ. Они определяются тем, *какая* поверхность вырезает кусок S на цилиндре. В нашем случае это верхняя половина конуса $z^2 = x^2 + y^2$ с осью вращения Oz. Ясно, что ограниченный кусок цилиндра лежит во внутренней полости конуса (содержащей ось Oz), то есть координаты его точек удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, или $y^2 \leqslant z^2 - x^2$.

Подставив в последнее неравенство параметрические выражения для x, y и z, мы тем самым найдем ограничения на область изменения параметров:

$$h^2 \leqslant 4a^2 \cos^4 \varphi - 4a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$
$$h^2 \leqslant 4a^2 \, \cos^2 \varphi \, \cos 2\varphi.$$

Отсюда следует, что $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Кроме того, из полярного уравнения цилиндра видно, что $\cos \varphi \geqslant 0$. Решением системы этих неравенств является отрезок $|\varphi| \leqslant \pi/4$. При каждом φ из этого промежутка $|\, h \,| \leqslant 2a \,|\, \cos \varphi \,| \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Видно, что область изменения параметров симметрична как по φ, так и по h. Подынтегральная функция $z = 2a \cos^2 \varphi$ четна и по φ, и по h. Поэтому можно взять интеграл по четверти этой области:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, \quad 0 \leqslant h \leqslant 2a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi},$$

а затем умножить его на 4.

Обозначим $h^* = 2a| \, \cos \varphi| \sqrt{\cos 2\varphi}$.

$$\iint\limits_S z\,dS = 4\int\limits_0^{\pi/4}\int\limits_0^{h^*} 4a^2\cos^2\varphi\,dh\,d\varphi =$$

$$= 32a^3\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 32a^3\int\limits_0^{\pi/4}(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= 32a^3\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}(1-p^2)\sqrt{1-2p^2}\,dp = \frac{7\sqrt{2}}{2}\,\pi a^3\,. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 13.</u> Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS,$$

где S — граница тела $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

$\blacktriangleleft$ Тело $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ представляет собой внутренность конуса, и его граница состоит из двух кусков — части конической поверхности $S_1 : z^2 = x^2+y^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$, и круга $S_2 : x^2+y^2\leqslant 1$, $z=0$. В силу аддитивности интеграла

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{S_2} f(x,y)\,dS.$$

Параметризуем конус S_1, используя цилиндрическую систему координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$:

$$\begin{cases} h^2 = r^2, \\ 0 \leqslant h \leqslant 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h = r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h\cos\varphi, \\ y = h\sin\varphi, \\ z = h. \end{cases}$$

Условие $0 \leqslant h \leqslant 1$ задает пределы интегрирования. Для φ можно взять любой интервал длины 2π.

Вычислим дифференциал площади поверхности dS:

$\vec{r}_h = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 1)$

$\vec{r}_\varphi = (-h\ \sin\varphi;\ h\ \cos\varphi;\ 0)$,

$E = (\vec{r}_h \cdot \vec{r}_h) = 2,\ \ G = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi) = h^2,\ \ F = (\vec{r}_h \cdot \vec{r}_\varphi) = 0.$

$dS = \sqrt{2}\ h\, dh\, d\varphi$

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS_1 = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 h^2 \sqrt{2}\, h\, d\, h\, d\, \varphi = \pi\sqrt{2}/2$$

Для круга S_2 возьмём стандартную параметризацию

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = 1, \quad r \leqslant 1.$$

Вычисляем $dS = r\, dr\, d\varphi$ и интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r \cdot r^2\, d\, r\, d\, \varphi = \pi/2\,.$$

Тогда $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS = (1 + \sqrt{2})\, \dfrac{\pi}{2}\,.$ ▶

ПРИМЕР 14. Вычислить $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида, а h — расстояние от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS его поверхности.

◀ Будем считать, что уравнение эллипсоида уже приведено к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Растяжениями по координатным осям уравнение эллипсоида легко преобразовать в уравнение сферы, поэтому рассмотрим стандартную параметризацию сферы

$$\begin{cases} x/a=\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y/b=\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z/c=\cos\theta. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=a\,\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y=b\,\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z=c\,\cos\theta. \end{cases}$$

Расстояние h от начала координат до плоскости, касающейся эллипсоида в некоторой точке, равно длине проекции радиус-вектора этой точки $\vec{r}$ на направление нормали $\vec{n}$, то есть $h=|\,(\vec{r}\cdot\vec{n})|$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль к эллипсоиду в этой точке.

Единичную нормаль можно получить, поделив любую из нормалей на ее длину. Возьмем нормаль N, связанную с выбранной параметризацией. Напомним, что векторы $\vec{r}_\theta$ и $\vec{r}_\varphi$, касательные к координатным линиям, образуют базис в касательной к S плоскости, а значит их векторное произведение — вектор, перпендикулярный каждому из них, является нормалью к этой плоскости. Кроме того, его длина равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то есть $dS = |\vec{N}|\, d\theta\, d\varphi$, где $\vec{N} = [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]$.

Таким образом, $h = |\,(\vec{r}\cdot\vec{n})| = |\,(\vec{r}\cdot\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|})| = \dfrac{|\,(\vec{r}\cdot\vec{N})|}{|\vec{N}|}$ и

$$\frac{dS}{h} = \frac{|\,\vec{N}|}{|\,(\vec{r}\cdot\vec{n})|}\, d\theta\, d\varphi = \frac{|\,\vec{N}|^2}{|\,(\vec{r}\cdot\vec{N})|}\, d\theta\, d\varphi$$

Найдем нормаль $\vec{N} = [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]$:

$\vec{r}_\theta = (a\,\cos\theta\cos\varphi,\ b\,\cos\theta\sin\varphi,\ -c\,\sin\theta)$,

$\vec{r}_\varphi = (-a\,\sin\theta\sin\varphi,\ b\,\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\,\cos\theta\cos\varphi & b\,\cos\theta\sin\varphi & -c\,\sin\theta \\ -a\,\sin\theta\sin\varphi & b\,\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b\,c\,\sin^2\theta\cdot\cos\varphi;\ a\,c\,\sin^2\theta\cdot\sin\varphi;\ a\,b\,\sin\theta\cdot\cos\theta) =$$

$$= a\,b\,c\,\sin\theta\,(\frac{\sin\theta\cdot\cos\varphi}{a};\ \frac{\sin\theta\cdot\sin\varphi}{b};\ \frac{\cos\theta}{c}) =$$

$$= a\,b\,c\,\sin\theta\,(\frac{x}{a^2};\ \frac{y}{b^2};\ \frac{z}{c^2}).$$

Поскольку точка $(x,\ y,\ z)$ находится на эллипсоиде, то

$$|(\vec{r}\cdot\vec{N})| = a\,b\,c\,\sin\theta\,(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}) = a\,b\,c\,\sin\theta.$$

И наконец,

$$|\vec{N}|^2 = a^2\,b^2\,c^2\,\sin^2\theta\,(\frac{\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}).$$

Прообразом эллипсоида, так же как и сферы, является прямоугольник $\Pi = \{(\theta;\varphi)|\,0\leqslant\theta\leqslant\pi, |\,\varphi|\leqslant\pi\}$. С учетом симметрии подынтегральной функции получаем:

$$\iint\limits_S \frac{dS}{h} = 2\,a\,b\,c\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi(\frac{\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\,\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2})\times$$

$$\times\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\,a\,b\,c\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi(\sin^2\theta\,(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2})+\frac{\cos^2\theta}{c^2})\times$$

$$\times\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = 2\,\pi\,a\,b\,c\int\limits_0^\pi(\sin^2\theta\,(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2})+\frac{\cos^2\theta}{c^2})\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{4\,\pi}{3}\,a\,b\,c\,(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) = \frac{4\,\pi}{3}\,(\frac{b\,c}{a}+\frac{a\,c}{b}+\frac{a\,b}{c})\,.\ \blacktriangleright$$

§3. Криволинейный интеграл второго рода

Заметим, что уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a;b]$, параметризующие кривую L, определяют её не только как множество точек, но также задают и порядок обхода этих точек при возрастании параметра, называемый направлением на кривой.

Можно показать, что направление является вполне геометрическим понятием. В случае простой незамкнутой кривой направление определяется лишь указанием начальной и конечной точек. В случае простой замкнутой кривой нужно указать на ней три точки и определить порядок их обхода. Например, от точки A к D через C. Используются и другие способы (против часовой стрелки, или так, что ограниченная часть плоскости остается слева).

Пусть в каждой точке кривой определена вектор-функция $\vec{F} = (P, Q, R)$ и существует скалярное произведение вектора $\vec{F}$ и вектора $\vec{\omega}'_t = (x'(t); y'(t); z'(t))$, касательного к кривой в этой точке. Тогда интеграл $\int\limits_L (\vec{F} \cdot \vec{\omega}'_t)\, d\ell$ называется интегралом второго рода по кривой L и обозначается $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Здесь содержится и правило вычисления этого интеграла:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b (P \cdot x' + Q \cdot y' + R \cdot z')\,dt.$$

Замечание. Во всех примерах декартова система координат $(x,\ y,\ z)$ предполагается правой!

ПРИМЕР 15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint\limits_C y\,dx + x\,dy,$$

где C — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Замечание. Поскольку эллипс является замкнутой кривой, то есть не имеет начальной и конечной точек, ориентация задается указанием на то, что при увеличении значений параметра точка кривой должна совершать обход против хода часовой стрелки.

Другим способом можно ориентировать кусочно-гладкую замкнутую кривую на плоскости, используя то, что она разбивает плоскость на две части - ограниченную и неограниченную. Положительным направлением считается такое, что при движении в сторону увеличения параметра ограниченная часть плоскости остаётся слева от наблюдателя, который находится на кривой и смотрит в сторону движения.

Другими словами, параметризация $(x(t),\, y(t))$ должна быть такой, чтобы касательный вектор $(x'(t);\, y'(t))$ и внутренняя нормаль к кривой образовывали правую пару векторов.

◀ Рассмотрим стандартную параметризацию эллипса $x = a\cdot\cos\varphi$, $y = b\cdot\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Тогда $x' = -a\cdot\sin\varphi$, $y' = b\cdot\cos\varphi$. Выясним, соответствует ли эта параметризация заданному направлению обхода.

Значение $\varphi = 0$ соответствует точке $x = a$, $y = 0$. При небольшом увеличении φ величина $\sin\varphi$, а следовательно и y, становятся положительными. Это означает, что точка движется по кривой против часовой стрелки.

Кроме того, касательный вектор $\vec{\tau}$ в этой точке равен $(0;\, b)$, а вектор внутренней нормали $\vec{n}$ равен $(-1;\, 0)$. Как нетрудно видеть, наименьший поворот от вектора $\vec{\tau}$ к вектору $\vec{n}$ совершается против часовой стрелки.

Таким образом, мы убедились (дважды), что параметризация соответствует условию задачи. Осталось вычислить сам интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} (\,-a\cdot\sin\varphi\cdot b\cdot\sin\varphi + b\cdot\cos\varphi\cdot a\cos\varphi\,)\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a\,b\cdot(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi = a\,b\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = 0\,. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 16. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint\limits_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

где C — окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

◀ Параметризуем окружность стандартным образом:

$$x = a\cdot\cos\varphi, \quad y = a\cdot\sin\varphi, \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

$$x' = -a\cdot\sin\varphi, \quad y' = a\cdot\cos\varphi.$$

Как и предыдущем примере, нетрудно убедиться, что параметризация соответствует ориентации кривой.

$$\oint\limits_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a\cdot\sin\varphi)^2 + (a\cdot\cos\varphi)^2}{a^2}\,d\varphi =$$

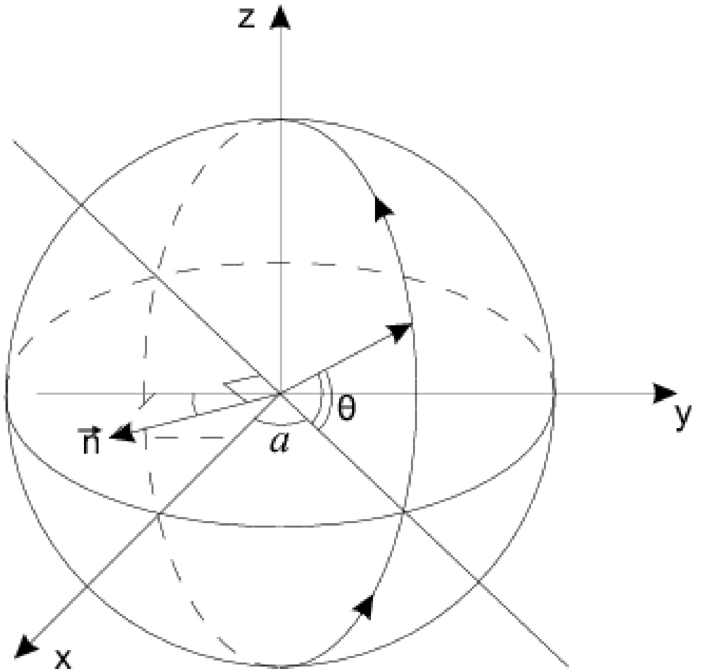
$$= \int\limits_0^{2\pi} 1\,d\varphi = 2\pi\,. \text{ ▶}$$

Замечание. Как видим, интеграл по замкнутому контуру вовсе не обязательно равен нулю.

ПРИМЕР 17. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\cos\alpha \cdot y = \sin\alpha \cdot x$ $(0 < \alpha < \pi)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части оси Ox.



◄ Окружность C лежит на сфере радиуса a, поэтому координаты ее точек в сферической системе координат имеют вид $x = a\,\sin\theta\,\cos\varphi$, $y = a\,\sin\theta\,\sin\varphi$, $z = a\,\cos\theta$ (напомним, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$).

С другой стороны, эта окружность лежит в плоскости $\cos\alpha{\cdot}y = \sin\alpha{\cdot}x$, поэтому, подставив полученные выражения для координат в уравнение плоскости, получим соотношение

$$a\,\cos\alpha\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi = a\,\sin\alpha\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi$$

$$\Rightarrow\quad \cos\alpha\cdot\sin\varphi = \sin\alpha\cdot\cos\varphi$$

Поскольку по условию $0<\alpha<\pi$, то $\sin\alpha\neq 0$. Если $\sin\varphi = 0$, то $\cos\varphi=\pm 1$ и следовательно, в силу уравнения, $\sin\alpha = 0$. Это противоречие показывает, что $\sin\varphi\neq 0$.

Поделим обе части равенства на $\sin\alpha\cdot\sin\varphi$, и получим, что $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha$. Это означает, что $\varphi=\alpha$ или $\varphi=\alpha+\pi$. Каждому их этих значений φ соответствует половина окружности, причем при изменении параметра θ от 0 до π движение точки по этим половинкам происходит во встречных направлениях от верхнего полюса $\theta=0$ до нижнего полюса $\theta=\pi$.

Чтобы получить непрерывную параметризацию окружности, выберем только значение $\varphi=\alpha$, но будем менять параметр θ в пределах от 0 до 2π. Тогда смена знаков x и y будет происходить не за счет смены знаков $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ при переходе от $\varphi=\alpha$ к $\varphi=\alpha+\pi$, а за счет смены знака $\sin\theta$ при переходе от $\theta<\pi$ к $\theta>\pi$. Таким образом, точка совершит полный обход окружности.

Итак, мы получили следующую параметризацию:

$$x = a\,\cos\alpha\,\sin\theta,\quad y = a\,\sin\alpha\,\sin\theta,\quad z = a\,\cos\theta,$$

$(0 \leqslant \theta < 2\pi)$.

Выясним, совпадает ли направление обхода, задаваемое этой параметризацией, с тем, которое дано в условии задачи. Если движение происходит против хода часовой стрелки при взгляде со стороны положительных x, то из точки $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ точка сначала смещается в полупространство $y < 0$, а затем - в полупространство $y > 0$. То есть должно быть $y < 0$ для $0 < \theta < \pi$ и $y > 0$ для $\pi < \theta < 2\pi$.

Поскольку по условию $0 < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha > 0$, и значит знак y совпадает со знаком $\sin\theta$, то есть сначала принимает положительные, а затем — отрицательные значения. Значит, выбранная параметризация задает направление обхода, противоположное тому, что указано в условии задачи.

Известно, что при изменении направления обхода кривой на противоположное интеграл второго рода меняет знак. Поэтому можно либо поменять направление обхода (сделав замену $\gamma = -\theta$), либо вычислить интеграл, пользуясь той параметризацией, которая у нас есть, а потом умножить результат на (-1). Именно так мы и поступим.

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz =$$

$$= (-1)\cdot \int\limits_0^{2\pi} a^2 \Big[(\sin\alpha\sin\theta - \cos\theta)\cdot\cos\alpha\cos\theta +$$

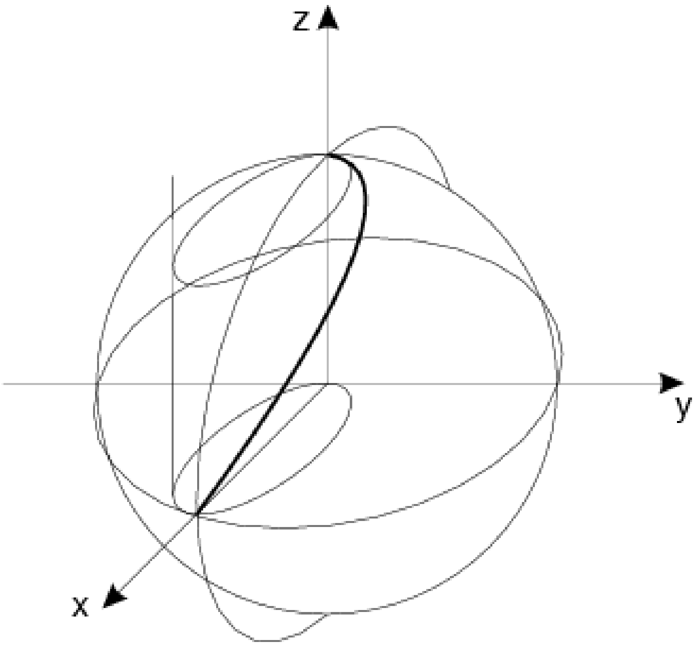
$$+(\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)\cdot\sin\alpha\cos\theta - (\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot\sin^2\theta\Big]\,d\theta =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\alpha - \cos\alpha)\,d\theta = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 18. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

где C — часть кривой Вивиани $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ $(z\geqslant 0)$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части $(x>a)$ оси Ox.



◀ Кривая Вивиани представляет собой пересечение сферы и цилиндра, направляющая которого параллельна оси Oz. Поэтому проекцией этой кривой на плоскость xOy будет окружность $x^2 + y^2 = ax$. Параметризация этой окружности была получена ранее: $x = a \cdot \cos^2 \varphi$, $y = a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$, $|\,\varphi\,| \leqslant \pi/2$.

Из уравнения сферы $z^2 = a^2 - (x^2 + y^2)$, то есть $z^2 = a^2 - a^2 \cdot \cos^2 \varphi = a^2 \sin^2 \varphi$. Поскольку $z \geqslant 0$, то $z = |\sin \varphi|$, и параметризация кривой Вивиани принимает вид

$$\begin{cases} x = a\,\cos^2\varphi = \dfrac{a}{2}(\cos 2\varphi + 1), \\ y = a\,\sin\varphi\,\cos\varphi = \dfrac{a}{2}\,\sin 2\varphi, \\ z = a\,|\sin\varphi|. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x' = -a\,\sin 2\varphi, \\ y' = a\,\cos 2\varphi, \\ z' = a\,\operatorname{sgn}(\varphi)\,\cos\varphi, \end{cases}$$

(на промежутке $|\,\varphi\,| \leqslant \pi/2$ знаки φ и $\sin\varphi$ совпадают).

Перейдем от криволинейного интеграла к интегралу по отрезку:

$$\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz =$$

$$= a^3 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{\sin^3 2\varphi}{4} + \sin^2\varphi \cdot \cos 2\varphi + \cos^5\varphi \cdot \operatorname{sgn}(\varphi) \right) d\varphi$$

Первое и третье слагаемое являются нечетными функциями, поэтому интеграл от них по симметричному промежутку равен нулю.

Второе слагаемое четно:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi \cdot \cos 2\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi)\,\cos 2\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz = -\frac{\pi}{4} \cdot a^3. \blacktriangleright$$

§4. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть поверхность S задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x = x\,(u;\ v)$, $y = y\,(u;\ v)$, $z = z\,(u;\ v)$, где $(u;\ v) \in D$, причем ранг этого отображения в каждой точке равен 2.

Тогда в каждой точке поверхности S можно определить два противоположно направленных единичных нормальных вектора, каждый из которых является непрерывной функцией точки $(u;\ v)$. Если при обходе по любой замкнутой кривой, лежащей на поверхности, при возвращении в исходную точку направление нормали не меняется, то такая поверхность называется ориентируемой. Ее ориентацию можно задать, указав одно из направлений нормали в любой точке.

Если в каждой точке ориентированной единичной нормалью $\vec{n}$ поверхности определена непрерывная вектор-функция $\vec{F} = (P;\ Q;\ R)$, то интеграл $\iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$ называется интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy).$$

Если вспомнить, каждой параметризации соответствует (не единичная) нормаль $\vec{N} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = (A;\ B;\ C)$, то можно получить ряд формул для вычисления поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS =$$

$$= \iint\limits_S (\vec{F}\cdot\frac{\vec{N}}{|\,N\,|})\,dS = \iint\limits_D (\vec{F}\cdot\vec{N})\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,du\,dv$$

<u>ПРИМЕР 19.</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

◀ Параметризация сферы нам известна:

$$x = a\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\quad y = a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\quad z = a\cdot\cos\theta,$$

где $\theta\in[0,\,\pi]$, $\varphi\in[0,\,2\pi)$.

Найдём нормаль $\vec{N} = [\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi]$:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi & a\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi & -a\cdot\sin\theta \\ -a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi & a\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(\sin^2\theta\cdot\cos\varphi;\ \sin^2\theta\cdot\sin\varphi;\ \sin\theta\cdot\cos\theta) =$$

$$= a\ \sin\theta\cdot(a\cdot\sin\theta\ \cos\varphi;\ a\cdot\sin\theta\ \sin\varphi;\ a\cdot\cos\theta) =$$

$$= a\ \sin\theta\cdot\vec{r},$$

Хотя нам и раньше было известно, что нормаль к сфере направлена по радиусу, но в данном случае её длина в каждой точке зависит от значения параметра θ и, как мы уже знаем, численно равна площади элемента dS, являющегося образом элемента $d\theta\, d\varphi$.

Кроме того, данная нормаль является внешней, поскольку она сонаправлена радиус-вектору ($\sin\theta \geqslant 0$ при $\theta \in [0,\ \pi]$).

Для вычисления интеграла нам понадобится преобразовать подынтегральное выражение.

Так как $\vec{F} = (x;\ y;\ z) = \vec{r}$, $N = a\ \sin\theta\cdot\vec{r}$ и для точки на сфере $(\vec{r}\cdot\vec{r}) = (x^2+y^2+z^2) = a^2$, то

$(\vec{F}\cdot\vec{N}) = (\vec{r}\cdot\vec{N}) = a\ \sin\theta\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r}) = a^3\ \sin\theta.$

А теперь вычислим интеграл:

$$\iint\limits_S (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy) = \iint\limits_S (\vec{r}\cdot\vec{N})\,dS =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a^3\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi a^3\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 4\pi\,a^3\,. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 20.</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant H)$.

<u>Замечание.</u> Данная поверхность не замкнута, однако является поверхностью вращения. Для таких простых поверхностей вращения как цилиндр, конус, параболоид, одно- и двуполостный гиперболоиды внутренней считается нормаль, направленная к оси вращения.

$\blacktriangleleft$ Учитывая, что $z \geqslant 0$, можно выразить z явным образом через $(x,\,y)$, а именно $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Отсюда получаем параметризацию

$$x = x; \quad y = y; \quad z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Соответствующая ей нормаль:

$$\vec{N} = (-z'_x; -z'_y; 1) = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ 1).$$

Так как для точки на поверхности $\sqrt{x^2+y^2} = z$, то

$$\vec{N} = (-\frac{x}{z};\ -\frac{y}{z};\ 1).$$

Поскольку $z \geqslant 0$, то проекция вектора $\vec{N}$ на плоскость xOy направлена противоположно вектору $(x;\,y)$, то есть к началу координат. Таким образом, найденная нормаль является внутренней. Также можно заметить, что для верхней половины конуса внешняя нормаль должна иметь отрицательную проекцию на ось Oz.

Заменим нормаль на противоположную: $\vec{N} = (\,\frac{x}{z};\ \frac{y}{z};\ -1)$.

Для вычисления интеграла преобразуем подынтегральное выражение. Поскольку $\vec{F} = (y-z;\ z-x;\ x-y)$, то

$$(\vec{F}\cdot\vec{N}) = (y-z)\cdot\frac{x}{z} + (z-x)\cdot\frac{y}{z} + (x-y)\cdot(-1) = 2\,(y-x).$$

А теперь вычислим интеграл:

$$\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS = \iint\limits_D 2\,(y-x)\,dD = 0,$$

так как подынтегральная функция $2\,(y-x)$ нечетна относительно преобразования $(x;\,y)\ \to\ (-x;\,-y)$, а круг D — проекция поверхности S на плоскость xOy — симметричен относительно этого преобразования. ►

<u>ПРИМЕР 21.</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right),$$

где S — внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

◄ Рассмотрим стандартную параметризацию эллипсоида:

$$x=a\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\quad y=b\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\quad z=c\cdot\cos\theta\,.$$

Соответствующая ей нормаль:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi & b\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi & -c\cdot\sin\theta\\ -a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi & b\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=(b\,c\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\varphi;\ a\,c\cdot\sin^2\theta\cdot\sin\varphi;\ a\,b\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta)=$$

$$=\sin\theta\cdot(b\,c\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi;\ a\,c\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi;\ a\,b\cdot\cos\theta)\,.$$

Выясним, является ли эта нормаль внешней. Возьмём, например, точку $(a;\,0;\,0)$. Она является концом полуоси эллипса, и внешняя нормаль должна быть сонаправлена радиус-вектору этой точки. Выбранной точке соответствуют значения параметров $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$, поэтому $\vec{N} = (\,b\,c;\,0;\,0)$, то есть нормаль внешняя.

Далее, $\vec{F} = (x^{-1};\,y^{-1};\,z^{-1})$, $\vec{N} = a\,b\,c\cdot\sin\theta\cdot(\dfrac{x}{a^2};\,\dfrac{y}{b^2};\,\dfrac{z}{c^2})$ поэтому

$$(\vec{F}\cdot\vec{N}) = a\,b\,c\cdot\sin\theta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

$$\iint\limits_S\left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right) = \iint\limits_S(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} a\,b\,c\cdot\sin\theta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) = 4\pi\;\frac{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{abc}\,.\;\blacktriangleright$$

§5. Формула Гаусса – Остроградского

Пусть область G пространства R^3 ограничена кусочно-гладкой поверхностью S, а функции $P(x,\,y,\,z)$, $Q(x,\,y,\,z)$, $R(x,\,y,\,z)$ вместе со своими производными P'_x, Q'_y, R'_z непрерывны в замыкании $\overline{G}$, тогда

$$\iint\limits_S (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy) = \iiint\limits_G (P'_x+Q'_y+R'_z)\,dx\,dy\,dz,$$

где S — внешняя сторона поверхности, ограничивающей G.

Замечание. Интеграл справа — это кратный интеграл, и его значение не зависит от ориентации поверхности S, являющейся границей G. А интеграл слева — поверхностный интеграл второго рода, и при изменении ориентации поверхности (изменении внешней нормали на внутреннюю) меняет знак.

Вводя обозначения $\vec{F} = (P;\,Q;\,R)$ и $\operatorname{div}\vec{F} = P'_x+Q'_y+R'_z$, и вспоминая формулу перехода от поверхностного интеграла второго рода к интегралу первого рода, формуле Гаусса – Остроградского можно придать следующий вид:

$$\iint\limits_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) =$$

$$= \iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz,$$

где n - единичная внешняя нормаль к поверхности S.

Если в §4 мы вычисляли поверхностные интегралы второго рода, непосредственно параметризуя поверхность S, то теперь мы можем вычислить эти интегралы, применяя формулу Гаусса – Остроградского.

<u>ПРИМЕР 22.</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀ Здесь $\vec{F} = (x;\ y;\ z)$ и $\operatorname{div}\vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$, поэтому

$$\iint\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) =$$

$$= \iiint\limits_G \operatorname{div}\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_G 3\,dx\,dy\,dz = 3\cdot\mu(G) = 4\pi\,a^3$$

где $\mu(G)$ — объем множества G, то есть объем шара радиуса a. ▶

<u>ПРИМЕР 23.</u> Вычислить поверхностный интеграл второ-

го рода

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

◀ Здесь $\vec{F} = (x^2;\ y^2;\ z^2)$ и $\operatorname{div}\vec{F} = 2\,(x+y+z)$. Применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy =$$

$$= \iiint\limits_G \operatorname{div}\,(x^2, y^2, z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G 2\,(x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где G — шар $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant R^2$.

Сделаем замену переменных, совместив начало координат с центром шара: $\xi = x-a$, $\eta = y-b$, $\zeta = z-c$. Тогда интегрирование будет идти по объему V: $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant R^2$

$$\iiint\limits_G 2\,(x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 2\iiint\limits_V (\xi+\eta+\zeta+a+b+c)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,.$$

Интеграл по шару V от функции $(\xi+\eta+\zeta)$ равен нулю в силу нечетности функции и соответствующей симметрии шара. Поэтому остается вычислить

$$2\iiint\limits_V (a+b+c)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \frac{8}{3}\,\pi\cdot(a+b+c)\cdot R^3\,.\ ▶$$

ПРИМЕР 24. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant H)$.

◀ Эта поверхность не является замкнутой, то есть не ограничивает никакого объема, поэтому применить формулу Гаусса – Остроградского непосредственно не удастся.

Замкнем ее, добавив плоскую «крышку»

$$K\colon x^2+y^2 \leqslant H^2, \quad z=H.$$

В силу аддитивности интеграла

$$\iint\limits_{S\bigcup K} \omega = \iint\limits_S \omega + \iint\limits_K \omega$$

где $\omega = (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$

Интеграл по замкнутой поверхности можно вычислить по формуле Гаусса–Остроградского:

$$\iint\limits_{S\bigcup K} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{F}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Однако $\operatorname{div}(y-z,\ z-x,\ x-y) = 0$, следовательно,

$$\iint\limits_{S\bigcup K} (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy = 0\,.$$

С другой стороны, поскольку плоскость $z = H$, в которой лежит круг K, имеет простую параметризацию $x = x$, $y = y$, $z = H$, то её нормаль, внешняя по отношению к объему G, имеет вид $\vec{N} = (0;\ 0,\ 1)$. Поэтому

$$\iint\limits_{K} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{K} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dx\,dy = \iint\limits_{K} (x-y)\,dx\,dy = 0$$

ввиду симметрии круга и нечетности подынтегральной функции.

Итак, подставляя в соотношение

$$\iint\limits_{S\bigcup K} \omega = \iint\limits_{S} \omega + \iint\limits_{K} \omega$$

найденные значения, приходим к выводу, что

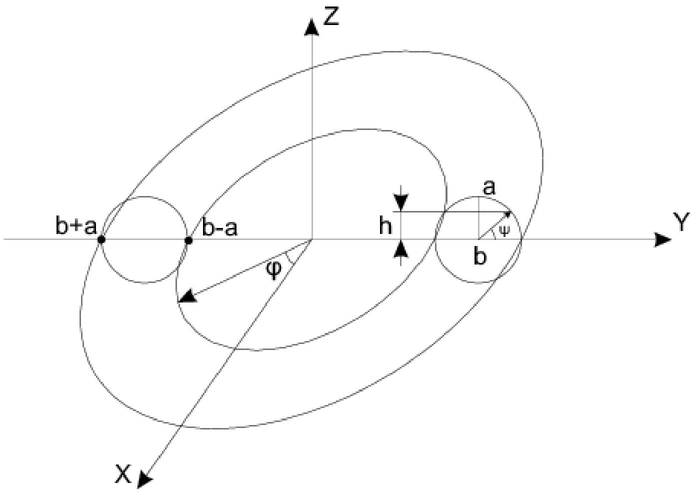
$$\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy = 0\,. \blacktriangleright$$

ПРИМЕР 25. Найти объем тела, ограниченного тором, который получается вращением окружности радиуса a вокруг оси, удаленной на расстояние b $(b > a)$ от центра окружности.

Замечание. С помощью формулы Гаусса – Остроградского можно вычислить объем тела через интеграл по поверхности, являющейся его границей. Для этого надо подобрать такую функцию $\vec{F} = (P;\ Q;\ R)$, чтобы $\operatorname{div}\vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$ равнялась единице. Например, $\vec{F} = (x;\ 0;\ 0)$, $\vec{F} = (0;\ y;\ 0)$, $\vec{F} = (0;\ 0;\ z)$ или их линейную комбинацию $\vec{F} = \dfrac{1}{3}(x;\ y;\ z)$.

◀ Чтобы определить положение точки на торе, достаточно указать положение точки на малой окружности и угол поворота этой окружности вокруг оси вращения.

Пусть ось вращения тора совпадает с осью Oz. Проведем меридиональное сечение тора (то есть сечение полуплоскостью, содержащей ось вращения). Расстояние точки от оси вращения обозначим через r.



Окружность радиуса a с центром в начале координат имеет параметризацию $r = a\cos\psi$, $z = a\sin\psi$. Сдвиг от оси вращения увеличивает значение r, не изменяя при этом значения z. То есть наша окружность параметризуется следующим образом: $r = b + a\,\cos\psi$, $z = a\,\sin\psi$.

Повернем меридиональную плоскость на угол φ вокруг оси Oz и получим искомую параметризацию:

$$x = (b + a\,\cos\psi)\,\cos\varphi, \quad y = (b + a\,\cos\psi)\,\sin\varphi, \quad z = a\,\sin\psi.$$

Параметры ψ и φ имеют простой геометрический смысл, поэтому ясно, что $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то есть тор S является образом квадрата $D = [0;\,2\pi) \times [0;\,2\pi)$ и может быть получен «склейкой» его противоположных сторон.

Поскольку в задаче явно прослеживается особая роль оси Oz, для вычисления объема выберем $\vec{F} = (0;\ 0;\ z)$. Тогда по формуле Гаусса – Остроградского

$$\mu(G) = \iiint\limits_G 1\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_G (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint\limits_S (P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy) =$$
$$= \iint\limits_S (P \cdot A + Q \cdot B + R \cdot C)\, dS,$$

где $(A;\ B;\ C)$ — вектор внешней нормали к поверхности S.

Поскольку $P = 0$ и $Q = 0$, то достаточно посчитать лишь C — третью координату нормали. Она равна

$$x_\psi \cdot y_\varphi - x_\varphi \cdot y_\psi = (-a\, \sin\psi) \cdot (b + a\, \cos\psi).$$

Выясним, является ли эта нормаль внешней. Возьмем значение $\psi = \pi/2$. В этой точке внешняя нормаль должна иметь положительную проекцию на ось Oz. У нас же получается $C = -a\, b$, поэтому сменим направление нормали.

Итак, $C = a\, \sin\psi \cdot (b + a\, \cos\psi)$. Продолжим вычисление объема:

$$\iint\limits_{S} z \cdot C\, dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} a\, \sin\psi \cdot a\, \sin\psi \cdot (b + a\, \cos\psi)\, d\psi\, d\varphi =$$

$$= 2\,\pi\, a^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\psi \cdot (b + a\, \cos\psi)\, d\psi = 2\,\pi^2\, a^2\, b$$

Этот результат интересен тем, что $2\,\pi^2\, a^2\, b = \pi\, a^2 \cdot 2\,\pi\, b$, то есть объем тора равен площади круга, являющегося его поперечным сечением, умноженной на длину пути, который проходит центр этого круга при полном обороте вокруг оси вращения. ►

§6. Формула Грина и формула Стокса

Пусть граница L плоской ограниченной области G является кусочно-гладкой кривой, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими производными P'_y и Q'_x непрерывны в замыкании $\overline{G}$, тогда

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy\,,$$

где контур L ориентирован так, что при его обходе область G остается слева.

<u>ПРИМЕР 26.</u> Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint\limits_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

◀ Поскольку функции $P = (x+y)$, $Q = (x-y)$ и их частные производные $P'_y = Q'_x = 1$ непрерывны во внутренности эллипса вплоть до границы, то по формуле Грина

$$\int\limits_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy =$$

$$= \iint\limits_G ((x-y)'_x - (x+y)'_y)\,dx\,dy = \iint\limits_S 0\,dx\,dy = 0\,. \blacktriangleright$$

Замечание. В примере 16 требовалось вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

по окружности $x^2+y^2=a^2$.

Нетрудно убедиться, что $P'_y = Q'_x$. Но формулу Грина здесь применить невозможно, поскольку функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$, а также их производные P'_y и Q'_x не определены и даже не ограничены (а значит, не могут быть доопределены по непрерывности) в точке $(0,\,0)\in G$.

Если существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x,\,y)$ такая, что $dU = P\,dx + Q\,dy$ (то есть подынтегральное выражение $P\,dx+Q\,dy$ является полным дифференциалом функции U), тогда для любой дуги AB криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от точек A и B, при этом

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A).$$

Если функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ вместе со своими производными P'_y и Q'_x непрерывны в замыкании односвязной области $\overline{G}$, тогда для независимости интеграла $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось соотношение $Q'_x = P'_y$.

При этом условии интеграл по любому замкнутому контуру L, лежащему внутри области G, будет равен нулю.

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy \;= 0\,.$$

<u>ПРИМЕР 27.</u> Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + \ y^2}}$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

◀ Убедимся, что выражение является полным дифференциалом, то есть $Q'_x = P'_y$:

$$P'_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = -\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$Q'_x = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = -\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ и их производные P'_y и Q'_x определены всюду, кроме точки $(0,\,0)$. Поэтому можно выбрать в качестве пути интегрирования отрезок с концами в точках $(1,0)$ и $(6,8)$. Найти его параметризацию несложно:

$x = 1 + 5t$, $y = 8t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда криволинейный интеграл сводится к интегралу по отрезку $0 \leqslant t \leqslant 1$, и желающие могут его посчитать.

Мы же рассмотрим другой путь интегрирования, представляющий собой ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Сдвинемся из точки $A(1, 0)$ вдоль оси Ox в точку $C(6, 0)$, а затем из точки $C(6, 0)$ параллельно оси Oy в точку $B(6, 8)$. В силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{AB} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{AC} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{CB} (P\,dx + Q\,dy).$$

Однако, поскольку $y \equiv 0$ вдоль отрезка AC, то

$$\int\limits_{AC} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{AC} P\,dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{6} P(x,\,0)\,dx = \int\limits_{1}^{6} \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,dx = \int\limits_{1}^{6} 1\,dx = 5.$$

Аналогично, так как $x \equiv 6$ вдоль отрезка CB, то

$$\int\limits_{CB} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{CB} Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{8} Q(6,\,y)\,dy = \int\limits_{0}^{8} \frac{y}{\sqrt{36 + y^2}}\,dy = 4.$$

И наконец

$$\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + \ y^2}} = 5 + 4 = 9\,. \blacktriangleright$$

Формула Грина является частным случаем более общей формулы, позволяющей свести вычисление интеграла по замкнутой кривой, лежащей в R^3, к интегрированию по поверхности, ограничиваемой этой кривой. Эта формула носит название формулы Стокса.

Итак, пусть L — кусочно-гладкая замкнутая кривая в R^3, являющаяся границей некоторой ориентируемой поверхности S. Функции $P(x,\,y,\,z)$, $Q(x,\,y,\,z)$, $R(x,\,y,\,z)$ вместе со своими частными производными непрерывны в некоторой области пространства, содержащей поверхность S. Тогда

$$\oint\limits_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \iint\limits_S (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy\,,$$

где ориентация контура L и поверхности S согласованы таким образом, чтобы при движении вдоль контура L по выбранной стороне поверхности S наблюдатель видел поверхность слева от себя. Такое направление обхода называется положительным.

Как и ранее, обозначим $\vec{F} = (P;\, Q;\, R)$ и введем вектор $\operatorname{rot}\vec{F} = (\,R'_y - Q'_z;\ P'_z - R'_x;\ Q'_x - P'_y)$. Тогда, вспоминая формулу перехода от поверхностного интеграла второго рода к интегралу первого рода, формуле Стокса можно придать следующий вид:

$$\oint\limits_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$$

где $\vec{n}$ - единичная нормаль к поверхности S, направление которой согласовано в ориентацией кривой L.

Для вычисления $\operatorname{rot}\vec{F}$ можно использовать формулу:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Этот определитель надо раскрывать по первой строке, понимая при этом умножение элементов второй строки на элементы третьей как применение операторов дифференцирования к соответствующим функциям.

Тогда если $\vec{n} = (n_1;\, n_2;\, n_3)$, то

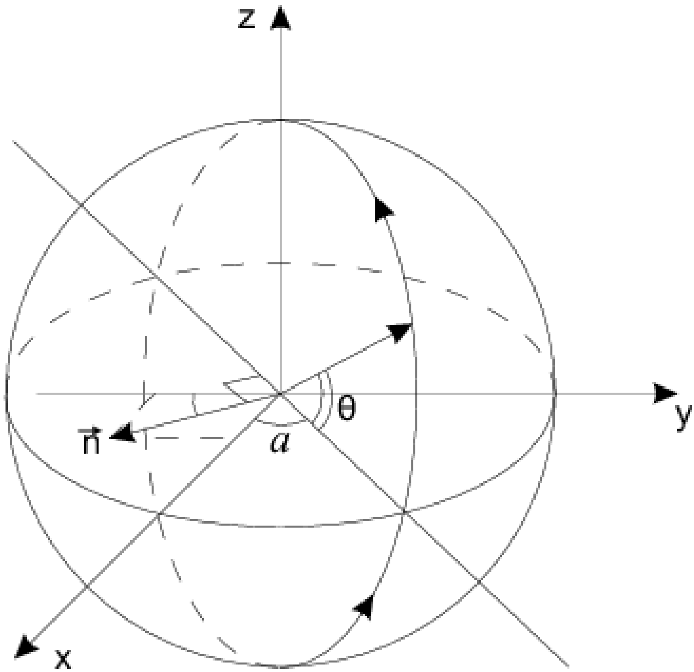
$$(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}) = \begin{vmatrix} \vec{n}_1 & \vec{n}_2 & \vec{n}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Если в §3 мы вычисляли криволинейные интегралы второго рода, непосредственно параметризуя кривую L, то теперь мы можем вычислить эти интегралы, применяя формулу Стокса.

<u>ПРИМЕР 28.</u> Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где C — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sin\alpha\cdot x = \cos\alpha\cdot y$ $(0<\alpha<\pi)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.



Эта окружность лежит в плоскости $\sin\alpha \cdot x = \cos\alpha \cdot y$, поэтому в качестве поверхности S возьмем часть этой плоскости, вырезанную сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Нетрудно видеть, что единичная нормаль $\vec{n}$ к плоскости равна $(\sin\alpha,\ -\cos\alpha, 0)$. Ее направление соответствует заданному обходу окружности, так как при $0 < \alpha < \pi$ проекция нормали на ось Ox положительна.

$\operatorname{rot}\vec{F} = (-2, -2, -2)$, $(\operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}) = (-2\ \sin\alpha + 2\ \cos\alpha)$

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz =$$

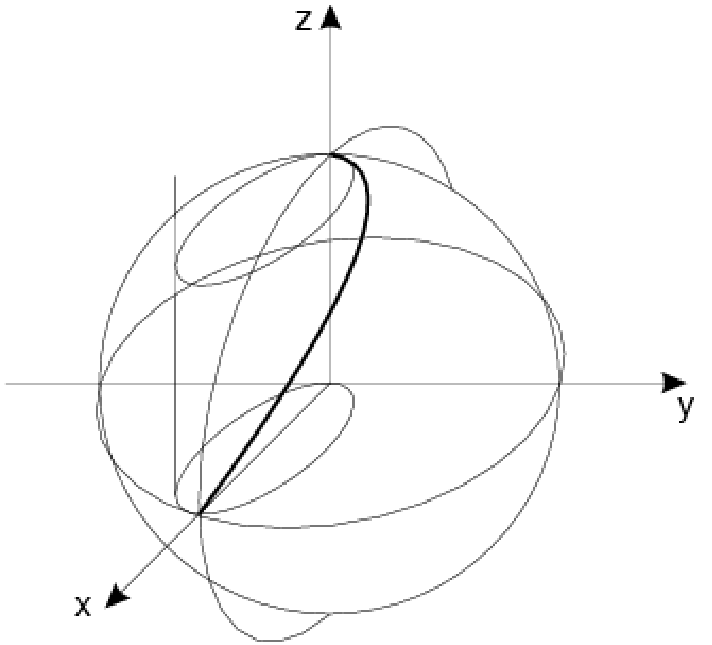
$$= \iint\limits_S (-2\ \sin\alpha + 2\ \cos\alpha)\,dS =$$

$$= 2\,(\cos\alpha - \sin\alpha) \iint\limits_S dS = 2\,\pi(\cos\alpha - \sin\alpha)\,a^2\,. \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 29.</u> Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

где C — часть кривой Вивиани $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ ($z \geqslant 0$, $a > 0$), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox.



Поскольку кривая Вивиани представляет собой пересечение сферы и цилиндра, в качестве поверхности, ограниченной кривой Вивиани, можно взять часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащую внутри цилиндра.

Нормаль к сфере, согласованная с направлением обхода, должна быть внешней:

$$\vec{n}=\left(\frac{x}{a};\,\frac{y}{a};\,\frac{z}{a}\right);\quad \operatorname{rot}\vec{F}=-2\,(z;\,x;\,y).$$

Применяя теорему Стокса, переходим к поверхностному интегралу первого рода:

$$\oint\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz =$$

$$= \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = -\frac{2}{a}\cdot\iint\limits_S (xz + xy + zy)\,dS,$$

Интеграл от последних двух слагаемых по S равен нулю, поскольку S симметрична относительно плоскости $y = 0$, а функция $(x + z)\,y$ нечетна по y.

Далее, проекцией поверхности S на плоскость xOy является круг K: $x^2 + y^2 \leqslant ax$, причем в силу условия $z \geqslant 0$ поверхность можно задать явным образом: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Поэтому $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$.

Продолжим вычисления:

$$-\frac{2}{a}\cdot\iint\limits_S (xz + xy + zy)\,dS = -\frac{2}{a}\cdot\iint\limits_S xz\,dS$$

$$= -2\iint\limits_K x\,dx\,dy = -2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^{a\cdot\cos\varphi} r^2\cdot\cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= -4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a^3}{3}\cdot\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{-\pi a^3}{4}\,.\ \blacktriangleright$$

<u>ПРИМЕР 30.</u> Вычислить криволинейный интеграл вто-

рого рода

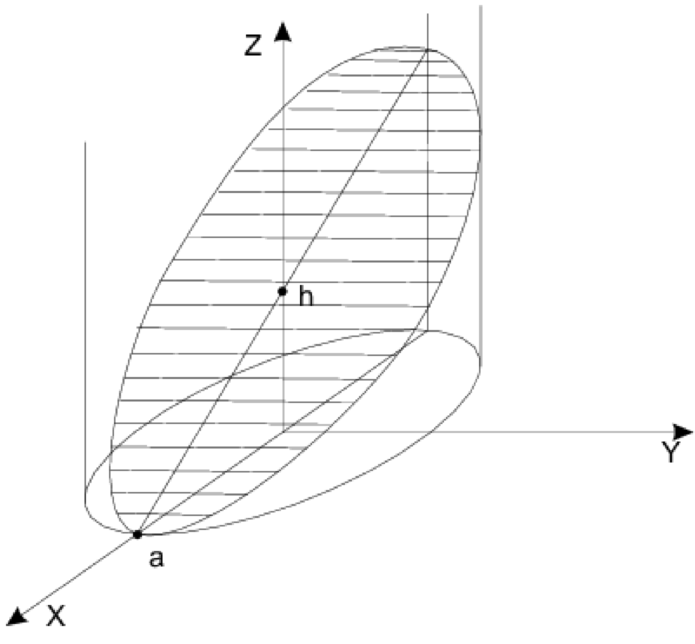
$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz\,,$$

где C — эллипс

$$x^2+y^2=a^2, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \quad (a>0,\ h>0),$$

пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительно стороны оси Ox.

◀ Воспользуемся формулой Стокса, выбрав в качестве поверхности S часть плоскости $(x/a)+(z/h)=1$, вырезанную цилиндром:



Из уравнения плоскости $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ нетрудно найти нормаль к ней:

$$\vec{N}=(1/a,\, 0,\, 1/h)\,,$$

а единичная нормаль соответственно равна

$$\vec{n}=\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\, 0,\, \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).$$

Далее, найдём $\operatorname{rot}\vec{F}$ и его проекцию на нормаль:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (y-z) & (z-x) & (x-y) \end{vmatrix}=(-2,\, -2,\, -2),$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})=\frac{-2\,(h+a)}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Вычисляем интеграл по C, переходя по формуле Стокса к интергалу по S:

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz=$$

$$=\iint\limits_S \frac{-2\,(h+a)}{\sqrt{a^2+h^2}}\,dS=\frac{-2\,(h+a)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint\limits_S 1dS$$

Поскольку проекцией S на плоскость xOy является круг

K: $x^2 + y^2 = a^2$, то

$$\iint\limits_S 1 dS = \iint\limits_K \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_K \sqrt{1 + (h/a)^2}\, dx\, dy = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \cdot \pi\, a^2$$

Подставляя вычисленное значение интеграла и сокращая на $\sqrt{a^2 + h^2}$, получаем

$$\oint\limits_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = -2\pi\, a\, (a + h)\,. \blacktriangleright$$

§7. Приложение

Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения. Также эти задачи могут быть использованы при составлении индивидуальных заданий для студентов.

Задание 1.

Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S f(x,\, y,\, z)\, dS$$

Параметр $a > 0$.

1. $f(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 + z^2$, S - поверхность, полученная вращением кардиоиды $r = a\,(1 + \cos t)$ относительно полярной оси Ox.

2. $f(x,\, y,\, z) = xyz$, S - часть конуса $z^2 = 2xy$, $z > 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

3. $f(x,\, y,\, z) = x + y + z$, S - часть конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

4. $f(x,\, y,\, z) = xz$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая между конусом $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$.

5. $f(x,\, y,\, z) = x - y^2 + z^3$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, лежащая между плоскостями $x + z = 0$ и $x - z = 0$.

6. $f(x,\, y,\, z) = \sqrt{x}$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2 + y^2 = z^2 + a^2$.

7. $f(x,\, y,\, z) = x - y$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая внутри цилиндра $z^2 = a(a - x)$.

8. $f(x,\, y,\, z) = |xy|$, S - поверхность тела, образованного пересечением цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$.

9. $f(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая внутри конуса $x^2 = y^2 + z^2$.

10. $f(x,\, y,\, z) = y^2$, S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, лежащая внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Задание 2.

Циркуляцией вектора $\vec{F} = (P;\, Q;\, R)$ по замкнутому контуру L называется интеграл $\oint\limits_L = P\,d\,x + Q\,d\,y + R\,d\,z$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ вдоль кривой L. Параметр $a > 0$.

1. $\vec{F} = (x^2 + y; y^2 + z; z^2 + x)$, L - кривая $x^2 + y^2 = 4$, $x+z = 2$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

2. $\vec{F} = (z^2 - y^2; x^2 - z^2; y^2 - x^2 + x)$, L - кривая $x^2 + y^2 = 8x$, $x + y + z = 0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

3. $\vec{F} = (2xy; z^2; x^2)$, L - кривая $2x^2 + 2y^2 = z^2$, $x + z = a$,

положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

4. $\vec{F} = (y^2 + z^2; x^2 + z^2; y^2 + x^2)$, L - верхняя $(z \geq 2)$ петля кривой $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, $x^2 + y^2 = 2x$, положительно ориентированная на внешней стороне сферы.

5. $\vec{F} = (z - x^2 - y; x + y + z; y + 2x + z^3)$, L - кривая $y^2 + z^2 = x^2$, $(x \geq 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, положительно ориентированная на внешней стороне сферы.

6. $\vec{F} = (z^2; x^2; y^2)$, L - кривая $x^2 + y^2 = 3z^2$, $(z \geq 0)$, $x^2 + y^2 = 2ax$, положительно ориентированная на внешней стороне конуса.

7. $\vec{F} = (xz^2; z + x + y; zy^2)$, L - кривая $x^2 = y^2 + z^2$, $x^2 + y^2 = ax$, положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.

8. $\vec{F} = (xyz; zy^2; zx^2)$, L - кривая $x^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + y^2 = a^2$, $(x \geq 0)$, положительно ориентированная на внешней стороне первого цилиндра.

9. $\vec{F} = (xy + z; zy + x; y|y|)$, L - кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = a^2$, положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.

10. $\vec{F} = (xy + z; yz + x; zx + y)$, L - кривая $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ положительно ориентированная на верхней

стороне плоскости.

<u>Задание 3.</u>

Потоком вектора $\vec{F} = (P;\ Q;\ R)$ через поверхность S называется интеграл $\iint\limits_S = P\,d\,y\,d\,z + Q\,d\,z\,d\,x + R\,d\,x\,d\,y$. Вычислить поток вектора $\vec{F}$ через поверхность S. Параметр $a > 0$.

1. $\vec{F} = (x^2;\ y^2;\ z^2)$, S - внешняя сторона поверхности $z = x^2 + y^2$, $0 < z < a$.

2. $\vec{F} = (x^2;\ y^2;\ z^2)$, S - верхняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = a^2 - 2az$, $0 < z$.

3. $\vec{F} = (x^2;\ y^2;\ z^2)$, S - внешняя сторона поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < a$.

4. $\vec{F} = (xy^2 + z^2; yz^2 + x^2; zx^2 + y^2)$, S - внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $0 < z$.

5. $\vec{F} = (yx^2; xy^2; xyz)$, S - нижняя сторона поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

6. $\vec{F} = (xy;\ yz;\ zx)$, S - внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z < a$.

7. $\vec{F} = (x^3;\ y^3;\ z^3)$, S - верхняя сторона поверхности $2 - z = x^2 + y^2$, $0 < z$.

8. $\vec{F} = (xz^2 + y^2; yx^2 + z^2; zy^2 + x^2)$, S - внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$, $0 < z < 1$.

9. $\vec{F} = (x^3;\ y^3;\ z)$, S - внутренняя сторона поверхности $1 + z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < 3$.

10. $\vec{F} = (xz^2;\ yx^2;\ zy^2)$, S - внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$, $3z^2 < x^2 + y^2$.

§8. Список литературы

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высш. шк., 1999.

2. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984.

3. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. 2, кн. 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2001.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.

5. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1991.

6. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург, 1994.

7. Сборник задач по математике для втузов. ч.2. Специальные разделы математического анализа./ под ред. Ефимова А. В. и Демидовича Б. П. М.: Наука, 1986.

8. Математический анализ в вопросах и задачах.: Учеб. пособие для вузов/ под ред. Бутузова В. Ф. М.: Физматлит, 2001.

Содержание